- Ex 1, 2, 3

Ex 1 : RANDU

$$x_i = 65539\, x_{i-1} \mod 2^{31}$$

$$u_i = x_i / 2^{31} \in (0,1)$$

1) il suffit de montrer que $x_i \equiv 6x_{i-1} - 9x_{i-2} \quad [2^{31}]$

$65539 = 2^{16} + 3$

$$x_i \equiv (2^{16}+3)\, x_{i-1} \equiv (2^{16}+3)^2 x_{i-2} \quad [2^{31}]$$

$$\equiv (2^{32} + 6 \cdot 2^{16} + 9)\, x_{i-2} \quad [2^{31}]$$

$$\equiv (2^{32} + 6 \times (2^{16}+3) - 9)\, x_{i-2} \quad [2^{31}]$$

$$\equiv 6x_{i-1} - 9x_{i-2} + 2^{32} x_{i-2} \quad [2^{31}]$$

comme $2^{32} \equiv 0 \, [2^{31}]$, $x_i - 6x_{i-1} + 9x_{i-2}$ est un multiple de 2^{31}

Ainsi, $u_i - 6u_{i-1} + 9u_{i-2}$ est un entier. Cet entier est restreint entre -5 et 9

Ex 2 : Rejet et loi de Laplace

1) générateur de Laplace par la méthode d'inversion :

Rappel : soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

$X \sim \mu$ de fonction de répartition F admettant une réciproque F^{-1}

alors le lemme d'inversion nous dit que : $F^{-1}(U) \sim \mu$

pour une loi de Laplace de densité $p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ nous avons :

$$F(t) = \frac{1}{2} e^{x} \mathbb{1}_{x \leq 0} + 1 - \frac{1}{2} e^{-x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$$

soit $x \leq 0$,

$$\frac{1}{2} e^{x} = u$$

$$x = \log(2u) \qquad \text{avec } u \leq 1/2$$

soit $x \geq 0$,

$$1 - \frac{1}{2} e^{-x} = u$$

$$x = \log(2(1-u)) \qquad \text{avec } u \geq 1/2$$

donc :

$$\forall u \in [0,1], \quad \boxed{F^{-1}(u) = \log(2u) \mathbb{1}_{u \leq 1/2} + \log(2(1-u)) \mathbb{1}_{u \geq 1/2}}$$

2) générateur de la loi normale via la méthode rejet-acceptation :

En se basant sur la loi de Laplace, on génère un échantillon suivant $\mathcal{N}(0,1)$

On cherche donc à majorer la densité gaussienne :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

par une constante m fois la densité de Laplace :

$$m g(x) = m \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

Comme la probabilité d'acceptation est donnée par $\frac{1}{m}$, on cherche à ce que m soit la plus petite possible :

$$m = \sup_x \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_x e^{-\frac{x^2}{2}+|x|} \boxed{= \sqrt{\frac{2e}{\pi}}}$$

La loi de Laplace peut être vue comme un mélange d'une exponentielle positive et négative de façon équiprobable. Tirons une v.a R suivant la loi de Rademacher ($R = \pm$ de façon équiprobable)

soit $R = -\mathbb{1}_{U \leq 1/2} + \mathbb{1}_{U \geq 1/2}$ avec $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

et $E \sim \mathcal{E}(1)$

Ainsi, la loi de Laplace Y vaut $R \times E \sim \text{Laplace}(1)$

Rq : on peut gagner un peu de temps vu que $\mathcal{N}$ et Laplace sont symétriques :

on tire d'abord $Y_0 = y_0 \sim \mathcal{E}(1)$ et on regarde si la proposition est acceptée via le rapport $r(y_0) = \frac{f(y_0)}{m\, g(y_0)} = e^{-\frac{1}{2}(|y_0|-1)^2} = \boxed{e^{-\frac{1}{2}(y_0-1)^2}}$

si elle est acceptée on tire $R \sim$ Rademacher et on pose $Y = R \times y_0$

Ex 3 :

1) soit $U_1, U_2 \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(-1,1)$, $s = U_1^2 + V_2^2$

il suffit de montrer que $S \sim \mathcal{U}(0,1)$

soit h mesurable et bornée,

$$E[h(U_1^2+V_2^2)] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h(u^2+v^2)\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h(u^2+v^2)\,du\,dv$$

CDV :
$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$
$\begin{cases} r = \sqrt{u^2+v^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \end{cases}$
$\det J = r$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\sqrt{2}} h(r^2)\,r\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{2} h(x)\,\cancel{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}\,dx$$

CDV :
$x = r^2$
$dr = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$
$r = \sqrt{x}$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}\int_{0}^{2} h(x)\,dx}$$

$\Rightarrow U_1^2 + U_2^2 \sim \mathcal{U}(0,2)$, comme $S \leq 1$, $\boxed{S \sim \mathcal{U}(0,1)}$